حل دورة 2017 الفصل الاول

1-ان الحلقة Z_6 تشكل حلقة جزئيه من الحلقة Z_{12} (خطأ) : لأن

$Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ $\qquad$ $Z_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

ليست مغلقة بالنسبة للضرب $\forall\, 4\,,5\ \in Z_6 \Longrightarrow 4.5 = 20 \bmod 12 = 8 \notin Z_6$

ليست مغلقة بالنسبة للجمع $\forall\, 4\,,5\ \in Z_6 \Longrightarrow 4+5 = 9 \bmod 12 = 9 \notin Z_6$

2-ان الحلقة $R = Z \oplus Z$ منطقة تكاملية لأن Z منطقة تكاملية (خطأ) لأنها تحوي قواسم للصفر

$$\forall\, (a,0),(0,b); a,b \neq 0\ \in Z \oplus Z \Longrightarrow (a,0).(0,b) = (0,0)$$

3-ان الحلقة $R = \{0,3,6,9,12\}$ بالنسبة للجمع والضرب بالمقاس 15 هي حقل (صح) لأنها

واحدية والحيادي هو 6 و تبديليه ولكل عنصر يملك مقلوب

$$3^{-1} = 12\ \ ,6^{-1} = 6\,,9^{-1} = 9\ ,12^{-1} = 3$$

$\cdot\, mod\ 15$	0	3	6	9	12
0	0	0	0	0	0
3	0	9	3	12	6
6	0	3	6	9	12
9	0	12	9	6	3
12	0	6	12	3	9

4-مميز الحلقة $5Z \oplus Z_5$ يساوي العدد 5 (خطأ) الصفر لأنها حلقة غير منتهيه

5-ان عدد عناصر حلقة الخارج $2Z_{18}/6Z_{18}$ يساوي 6 عناصر (خطأ) 3 عناصر

6-كل عنصر جامد وغير صفري بالحلقة R يكون عديم القوه (خطأ)

$$\forall \underbrace{a}_{\text{جامد}} \in R\,;\ a^2 = a \Longrightarrow a^n = a$$

وبالتالي لايكون a عديم القوه الا اذا كان $a = 0$

7-ان المثالية $9Z_{12}$ حدمباشرفي الحلقة Z_{12} (صح) لأن الـ 9عنصرجامد في الحلقة Z_{12}

$$9^2 = 81 mod 12 = 9$$

8-ان حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ فوق حلقة الاعداد الصحيحه Z تماثل حلقة الاعداد الصحيحه Z (خطأ) لأن

Zمنطقة تكامليه بينما $M_2(Z)$ ليست منطقة تكامليه لانها ليست تبديليه كما انها تحوي قواسم للصفر

$$\left\{M_2(Z) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a,b,c,d \neq 0 \in Z\right\} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9-**المثاليه الصفرية أوليه في أي حلقة تبديليه** (خطأ) أوليه في الحلقات التامه

10-اذا كانت $A = \langle 12 \rangle$ مثاليه في حلقة الاعداد الصحيحه Z فإن $radA = \langle 4 \rangle$ (خطأ)

$$A = \langle 12 \rangle = 12Z = \{0, \pm 12, \pm 24, \pm 36, \dots \dots \dots . .\}$$

$$\underbrace{12Z \Rightarrow \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}}_{\text{عالمسودة}} \Rightarrow rad12Z = \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle = \langle 6 \rangle$$

11-**ان $\langle 0 \rangle$ مثالية أعظمية في حلقة الأعداد الحقيقيه R** (صح) لأن R حقل وفي كل حقل لايوجد سوى مثاليتين الحقل نفسه والمثاليه الصفريه

12-ان الحلقة $(Z_{12}, +, .)$ حلقة موضعيه (خطأ) لأنها تملك مثاليتين اعظميتين هما $\langle 3 \rangle$و$\langle 2 \rangle$

13-**اذا كانت $R = Z_{30}$ فإن $\langle 6 \rangle = \langle 3 \rangle \cap \langle 2 \rangle = \mathfrak{J}(Z_{30})$** (خطــأ) لأن المثاليات الأعظميه الموجوده في Z_{30} هي $\langle 5 \rangle, \langle 3 \rangle$و$\langle 2 \rangle$ ومنه $\mathfrak{J}(Z_{30}) = \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle \cap \langle 5 \rangle$

14-اذا كانت $B = 6Z$ و $A = 4Z$ مثاليتين في Z فإن $A{:}B = 12Z$ (خطأ)

لنوجد $4Z{:}6Z$ 　 $4Z$و $6Z$ مثاليتين في الحلقة Z عندئذ:

$.$	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	…..
$6Z$	0	$6Z$	$12Z$	$18Z$	$24Z$	$30Z$	$36Z$	… …
الأحتواء في$4Z$	$\subseteq 6Z$	$\nsubseteq 6$	$\subseteq 6Z$	$\nsubseteq 6Z$	$\subseteq 6Z$	$\nsubseteq 6Z$	$\subseteq 6Z$	… …

اذا العناصر المحتواة في $6Z$ هي $\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ وهي عناصر $2Z$ ومنه نكتب

$$4Z{:}6Z = 2Z$$

15-**ان الحدوديه $f(x) = x^2 + 1$ هي حدودية أوليه فوق Z_5** (خطأ) غير أوليه

لدينا $f(x)$ من الدرجة الثانيه و Z_5 حقل لان ال5 عدد اولي وحسب المبرهنه -اذا ملكت الحدوديه $f(x)$ فوق الحقل Z_p اصفار نقول عنها غير اوليه (بحيث $f(x)$ من الدرجة الثانيه او الثالثه)

وهيي تملك صفرين

$$f(0) = 1 , \quad f(1) = 2 , \quad \underbrace{f(2) = 5mod5 = 0}_{\text{صفر}} , \underbrace{f(3) = 10mod5 = 0}_{\text{صفر}} , f(4) = 2$$

****

الأستاذ:حسين علي